MATEMATICA C3 - GEOMETRIA
3. RETTE PARALLELE

Intersection de deux parallèles Phot by: OliBac
Taken from: http://www.flickr.com/photos/olibac/3244014009/ license: Creative Commons Attribution

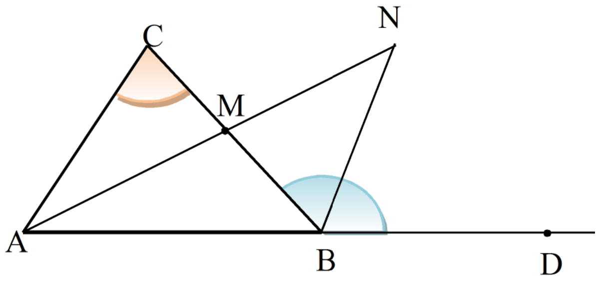
Indice

►1. Primo teorema dell'angolo esterno

Iniziamo il capitolo con una proprietà che riguarda i triangoli, nota come **primo** teorema dell'angolo esterno. Ricordiamo che un angolo esterno di un poligono è un angolo che ha come vertice un vertice del poligono ed è adiacente ad un angolo interno.

TEOREMA DELL'ANGOLO ESTERNO. **In un triangolo un angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti.**

Dimostrazione. Sia ABC un triangolo. Prolunghiamo il lato AB dalla parte di B e prendiamo un qualsiasi punto D sul prolungamento. Vogliamo dimostrare che l'angolo $C\widehat{B}D$ è maggiore sia dell'angolo $C\widehat{A}B$ sia dell'angolo $A\widehat{C}B$. A tal fine prendiamo il punto medio del lato CB, lo chiamiamo M; uniamo A con M e prolunghiamo AM dalla parte di M, prendendo un punto N sul prolungamento in modo che AM sia congruente a MN; uniamo N con B.



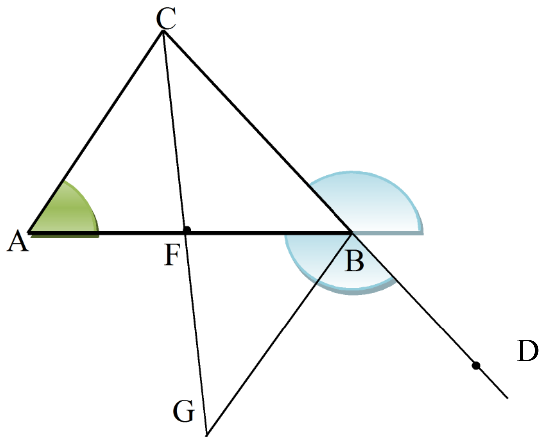
Osserviamo che i triangoli AMC e BNM sono congruenti per il primo criterio, infatti:

1. $CM \cong MB$ perché M è punto medio per costruzione,
2. $AM \cong MN$ per costruzione,
3. $C\widehat{M}A \cong B\widehat{M}N$ perché opposti al vertice.

Di conseguenza i restanti elementi dei due triangoli sono ordinatamente congruenti, in particolare $A\widehat{C}M \cong M\widehat{B}N$. Ma l'angolo $M\widehat{B}N$ è una parte propria dell'angolo esterno $C\widehat{B}D$ che risulta pertanto maggiore di esso e dell'angolo interno di vertice C.

Rimane ora da dimostrare che $C\widehat{B}D$ è anche maggiore di $C\widehat{A}B$.

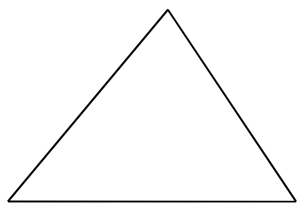
Prolunghiamo il segmento CB dalla parte di B viene individuato un altro angolo esterno, che però è congruente al precedente: è anch'esso adiacente all'angolo interno di vertice B ed è opposto al vertice di $C\widehat{B}D$. Usiamo tale angolo ed una costruzione analoga alla precedente a partire dal punto medio F del segmento AB e dal punto G sul prolungamento di CF, con $CF \cong FG$ in modo da ottenere, dal confronto dei triangoli congruenti AFC e FGB, che l'angolo interno di vertice A è congruente all'angolo $F\widehat{B}G$ che è una parte propria dell'angolo esterno di vertice B. C.V.D.



1 Vero Falso? In un triangolo:

a) Per ogni lato c'è un solo angolo esterno [V] [F]
b) Un angolo esterno è maggiore della somma degli angoli interni [V] [F]
c) L'angolo esterno non può essere acuto [V] [F]
d) L'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei tre angoli interni [V] [F]
e) L'angolo interno è minore di ciascuno degli angoli esterni non adiacenti [V] [F]
f) L'angolo esterno è maggiore di ciascuno degli angoli interni ad esso non adiacenti [V] [F]

2 Disegna per ciascun vertice del triangolo almeno un angolo esterno



3 Nel triangolo isoscele ABC di base AB prolunga il lato CB fino a un punto D. Dimostra che: . $A\widehat{B}D > A\widehat{C}B$, $C\widehat{B}A > A\widehat{D}B$, $C\widehat{A}B > B\widehat{A}D$, C

4 Internamente a un triangolo ABC prendi un punto D. Congiungi D con A, con B e con C. Il prolungamento di AE incontra il lato BC nel punto E. Dimostra che: $B\widehat{D}E > B\widehat{A}D$, $B\widehat{D}C > B\widehat{A}C$, $A\widehat{E}B > D\widehat{C}B$.

5 Nel triangolo ABC traccia la bisettrice AP dell'angolo in A. Dimostra che nel triangolo APC, l'angolo in P è maggiore dell'angolo in A.

6 Dimostra che la somma di due angoli interni di un triangolo è minore di un angolo piatto. (Considera l'angolo esterno a uno dei due angoli).

7 Dimostra che un triangolo non può avere più di due angoli retti.

8 Dimostra che un triangolo non può avere due angoli ottusi.

9 Dimostrare che gli angoli alla base di un triangolo isoscele devono essere acuti.

►2. Rette perpendicolari

Ricordiamo che due rette giacenti su uno stesso piano si dicono perpendicolari se si incontrano dividendo il piano in quattro angoli congruenti. In realtà è sufficiente sapere che uno dei quattro angoli che si vengono a formare è retto, per concludere che sono tutti retti.

PROPRIETÀ. **Siano AB e CD due rette incidenti di intersezione E, se risulta che l'angolo** $A\widehat{E}C$ **è retto, allora sono retti anche gli angoli** $A\hat{E}D$, $B\hat{E}C$ e $B\hat{E}D$ **.**

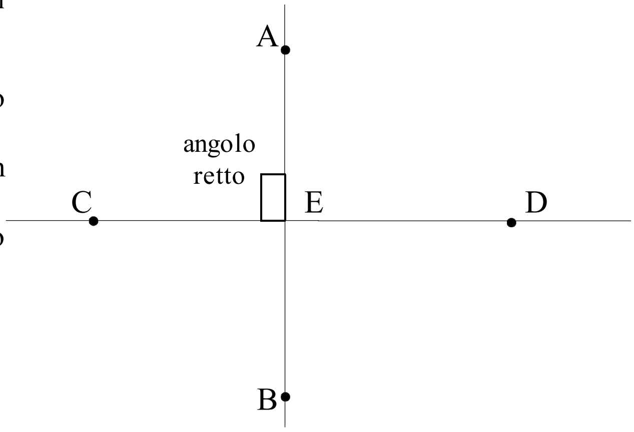
Se due rette incidenti formano un angolo retto allora tutti gli angoli che si formano sono retti

Dimostrazione

L'angolo $A\hat{E}D$ è retto perché adiacente a un angolo retto;

l'angolo $D\widehat{E}B$ è retto perché opposto al vertice a un angolo retto;

l'angolo $C\widehat{E}B$ è retto perché adiacente a un angolo retto. C.V.D.



L'esistenza e l'unicità della perpendicolare sono assicurate dal seguente teorema.

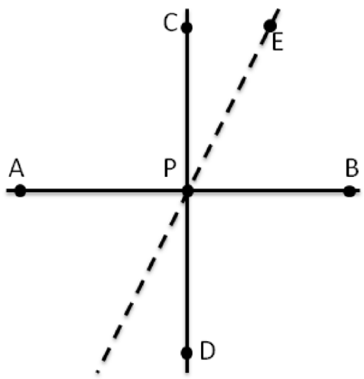
TEOREMA. **Nel piano, data una retta ed un punto, esiste ed è unica la retta perpendicolare alla retta data e passante per il punto assegnato.**

Dimostrazione

Per la dimostrazione, distinguiamo due casi.

Primo caso: il punto appartiene alla retta.

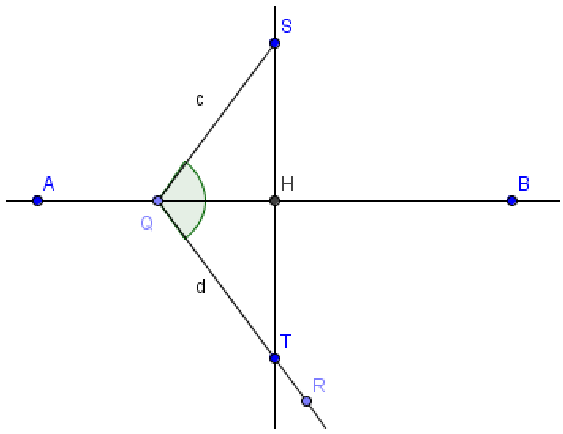
Sia AB una retta del piano e sia P un suo punto. Allora se tracciamo la bisettrice di uno dei due angoli piatti $A\widehat{P}B$, questa è certamente perpendicolare ad AB, in quanto i due angoli che si vengono a formare sono la metà di un angolo piatto e pertanto sono retti.



Prolungando questa bisettrice, si viene a formare una retta CD perpendicolare ad AB. Supponiamo per assurdo che la retta CD non sia l'unica perpendicolare ad AB passante per il punto P ma che ne esista un'altra. Detto E un punto su tale ipotetica retta distinto da P, se E appartenesse anche alla retta CD, allora PE coinciderebbe con CD, quindi PE non sarebbe distinta dalla retta CD; se invece E non appartenesse a CD, unendo E con P, si verrebbero a formare due angoli $A\widehat{P}E$ e $E\widehat{P}B$ di cui uno acuto ed uno ottuso, e quindi la retta EP non risulterebbe perpendicolare ad AB.

Secondo caso: il punto non appartiene alla retta.

Sia AB una retta nel piano e sia S un punto del piano non appartenente ad essa. Costruiamo la perpendicolare ad AB passante per S e dimostriamo che è unica.



Possiamo prendere un punto Q appartenente ad AB e congiungere S con Q. Se gli angoli $A\widehat{Q}S$ e $S\widehat{Q}B$ sono retti, abbiamo già trovato la perpendicolare. Altrimenti, vuol dire che gli angoli $A\widehat{Q}S$ e $S\widehat{Q}B$ sono uno acuto ed uno ottuso. Tracciamo la semiretta QR, di origine Q e giacente nel semipiano individuato da AB non contenente il punto S, che divide il semipiano in due angoli, $A\widehat{Q}R$ e $R\widehat{Q}B$, rispettivamente congruenti a $A\widehat{Q}S$ e $S\widehat{Q}B$. Prendiamo un punto T su tale semiretta in modo che il segmento QT sia congruente a QS. Uniamo S con T e chiamiamo H il punto d'intersezione tra ST ed AB. Allora il triangolo QTS è isoscele sulla base ST, ed il segmento QH è la bisettrice dell'angolo al vertice $S\widehat{Q}T$, che risulta pertanto essere anche mediana ed altezza relativa alla base ST. Dunque gli angoli $S\widehat{H}Q$ e $T\widehat{H}Q$ sono retti, e quindi la retta ST è perpendicolare ad AB.

Abbiamo quindi trovato la perpendicolare ad AB passante per S. Per dimostrare che è unica possiamo ricorrere al ragionamento fatto nel primo caso, dove ora H è il punto P della dimostrazione precedente.

Il teorema è pertanto dimostrato.

10 Vero Falso?

a) Dati un punto P e una retta r esiste sempre una retta perpendicolare a r e passante per P [V] [F]

b) Dati un punto P e una retta r esistono infinite rette passanti per P e perpendicolari a r [V] [F]

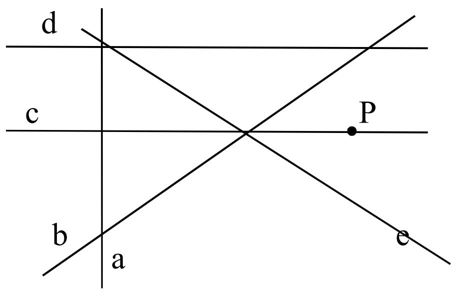
c) L'unicità della perpendicolare per un punto a una retta è un assioma [V] [F]

d) L'unicità della parallela per un punto a una retta è un assioma [V] [F]

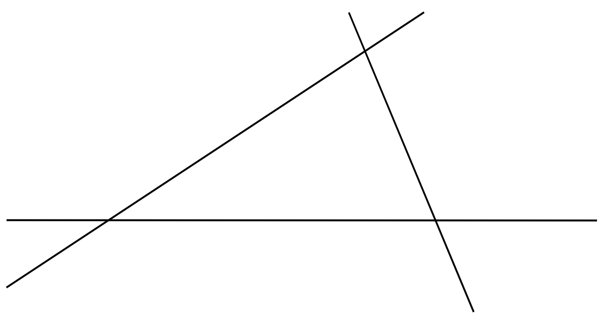
11 Una retta a è perpendicolare a una retta b, la quale a sua volta è perpendicolare a una terza retta C, le rette a e c sono

[A] parallele [B] perpendicolari [C] né parallele né perpendicolari

12 Disegna le rette passanti per P e perpendicolari alle altre rette presenti nel disegno



13 Per ognuno dei punti di intersezione delle tre rette traccia la perpendicolare a ciascuna retta



14 Dimostra che le bisettrici di due angoli adiacenti sono perpendicolari.

►3. Rette parallele

Secondo la definizione di Euclide, due rette nel piano sono parallele se non hanno punti in comune.
In maniera più moderna il concetto di parallelismo è interpretato come l'avere la stessa direzione.

Si può anche dare una formulazione che unifichi le due definizioni precedenti; si deve però ricorrere al concetto di distanza: due rette nel piano sono parallele se mantengono sempre la stessa distanza. Se la distanza è nulla, le due rette sono coincidenti.

Noi utilizzeremo la seguente:

DEFINIZIONE. Due rette giacenti nello stesso piano si dicono **parallele** se sono coincidenti oppure non s'incontrano mai.

Assumiamo dunque questa come definizione di parallelismo. Abbiamo però bisogno di precisare il concetto di distanza.

Dati due punti P e Q, la distanza tra P e Q è la lunghezza del percorso più breve che unisce i due punti. Questo concetto è valido anche se si riferisce alle distanze tra due città che si trovano negli stradari: sono riportate le lunghezze dei percorsi minimi tra tutte le strade alternative che collegano due città. Naturalmente, nel piano, ove si "dispone" di tutti i punti da poter "attraversare", il percorso più breve che collega due punti P e Q è il segmento PQ; quindi nella geometria euclidea assumiamo come distanza tra due punti la lunghezza del segmento avente per estremi i due punti.

Se vogliamo parlare di distanza tra due insiemi di punti, allora va considerato il percorso più breve tra tutti i percorsi che collegano un qualsiasi punto del primo insieme con un qualsiasi punto del secondo: in pratica la distanza è la lunghezza del più piccolo segmento tra tutti quelli che collegano i due insiemi di punti.

Nel caso particolare di un punto A ed una retta BC, se il punto appartiene alla retta allora la distanza di A da BC è uguale a zero, altrimenti si considera come distanza la lunghezza del segmento AH, dove H è il punto in cui la perpendicolare a BC passante per A interseca la stessa retta BC: il motivo si intuisce in base a quanto detto, ma risulterà chiaro più avanti, quando affronteremo lo studio delle disuguaglianze tra gli elementi di un triangolo.

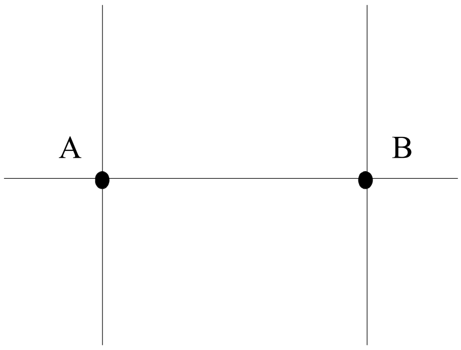
Analogamente, come distanza tra due rette parallele si assume la lunghezza di un qualunque segmento che unisce il punto di una delle due rette con il piede della perpendicolare mandata da esso sull'altra retta. Affermare che tali segmenti sono tutti congruenti è un modo più preciso per dire che le due rette *mantengono sempre la stessa distanza*.

Ricordiamo la versione "moderna" del **V Postulato di Euclide:** *dati una retta **r** ed un punto **P**, allora esiste una ed una sola retta parallela ad **r** e passante per **P**.*

PROPOSIZIONE. **Se due rette nel piano sono perpendicolari alla stessa retta, esse sono parallele tra loro.**

Dimostrazione. Sia r una retta, e siano s e t due rette, entrambe perpendicolari ad r.
Se s e t intersecano r nello stesso punto P, allora per il teorema precedente necessariamente coincidono, e dunque sono parallele per la nostra definizione di parallelismo.

Consideriamo ora il caso in cui s e t intersecano r in due punti distinti, rispettivamente A e B. Supponendo per assurdo che s e t si intersechino in un punto C, risulterebbero due distinte rette passanti per C e perpendicolari alla stessa retta, assurdo per il teorema precedente. Dunque deve risultare $s//t$. C.V.D.



Analoghe proprietà valgono per rette parallele e per rette incidenti qualunque. Precisamente:

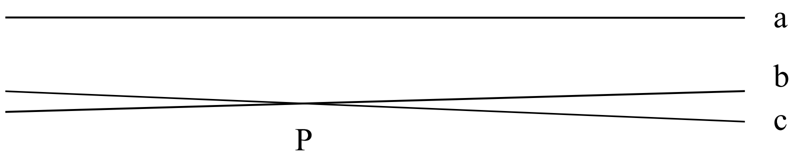
PROPOSIZIONE. **Siano date due rette parallele, se una terza retta è parallela ad una delle due, è parallela anche all'altra; inoltre, ogni retta che interseca una delle due, interseca anche l'altra.**

Dimostrazione. Siano a, b, c tre rette, con $a//b$. Se a coincide con b, la tesi è banale. Supponiamo quindi che a e b non abbiano punti in comune.

Vogliamo dimostrare che se $c//a$ allora $c//b$.
La tesi è banale se c coincide con a oppure con b.
Supponiamo dunque che c sia distinta da entrambe.

Ricordiamo il V Postulato di Euclide: *dati una retta **r** ed un punto **P**, allora esiste una ed una sola retta parallela ad **r** e passante per **P**.*

Dimostriamo che se *c* non ha punti in comune con *a*, allora non può avere punti in comune neppure con *b*. Se per assurdo *c* avesse un punto P in comune con *b*, allora esisterebbero due rette distinte passanti per P entrambe parallele alla stessa retta *a*, cosa che contraddice il quinto postulato di Euclide.



Se b//a e c//a, per il punto P passerebbero due parallele ad a; il che contraddice il V postulato di Euclide

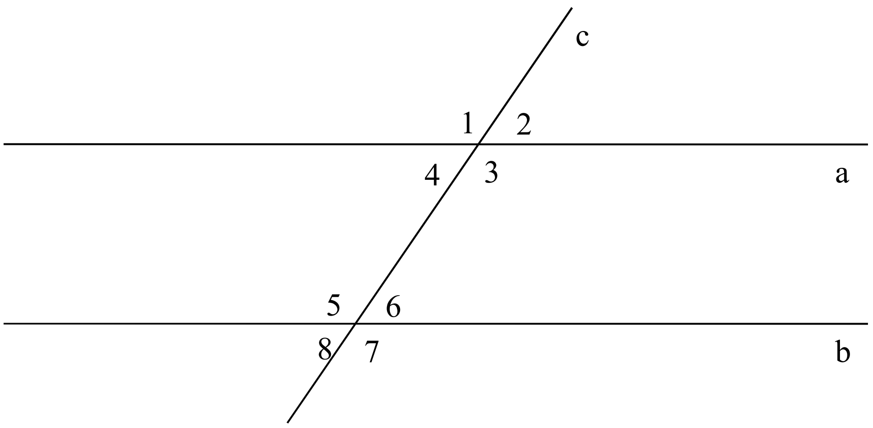
Dimostriamo ora che se *c* interseca la retta *a* allora interseca anche la retta *b*. Detto Q il punto d'intersezione tra le rette *a* e *c*, se per assurdo *c* non intersecasse la retta *b*, cioè se fosse *c//b*, allora *a* e *c* sarebbero due rette distinte passanti per Q entrambe parallele alla retta *b*, contrariamente *a* quanto dice il quinto postulato di Euclide. C.V.D.

Osservazione. La proposizione precedente rappresenta una sorta di proprietà transitiva del parallelismo. In realtà si è scelto di considerare parallele sia rette nel piano che non hanno punti in comune sia rette coincidenti proprio per fare in modo che la relazione di parallelismo sia una relazione di equivalenza: riflessiva, simmetrica, transitiva. Con la definizione di parallelismo data da Euclide, al contrario, sarebbe stata solo simmetrica, ma non riflessiva né transitiva. Per convincersi della non transitività, basta considerare tre rette *a*, *b*, *c* con *a* e *c* coincidenti e *b* parallela ad entrambe e distinta da esse: allora *a//b* e *b//c*, ma *a* e *c* non sono parallele secondo la definizione di Euclide.

Rette parallele tagliate da una trasversale

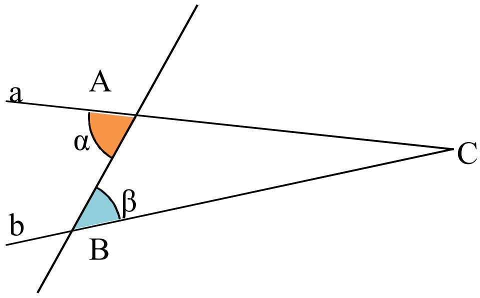
Due rette parallele *a* e *b* vengono intersecate da una retta *c* (detta trasversale) che non è parallela ad esse,

- se la retta *c* è perpendicolare (ad entrambe), si vengono a formare otto angoli retti;
- se la retta c non è perpendicolare ad esse, si vengono a formare otto angoli, di cui quattro acuti e quattro ottusi, rispetto alla posizione che occupano hanno i seguenti nomi:



- Gli angoli 1 e 5, gli angoli 2 e 6, gli angoli 3 e 7, gli angoli 4 e 8 si dicono **corrispondenti** (si dicono corrispondenti perché occupano posizioni analoghe da una parallela all'altra);
- gli angoli 3 e 5, gli angoli 4 e 6 si dicono **alterni interni** (si dicono alterni perché occupano posizioni opposte rispetto alla trasversale; interni perché si trovano all'interno delle due parallele);
- gli angoli 1 e 7, gli angoli 2 e 8 si dicono **alterni esterni** (alterni perché sono opposti rispetto alla trasversale; esterni perché si trovano all'esterno della zona tra le due parallele);
- gli angoli 3 e 6, gli angoli 4 e 5 si dicono **coniugati interni** (si dicono coniugati perché stanno dalla stessa parte rispetto alla trasversale);
- gli angoli 1 e 8, gli angoli 2 e 7 si dicono **coniugati esterni**.
- Inoltre 1 e 3, 2 e 4, 5 e 7, 6 e 8 sono **opposti al vertice**.

TEOREMA DELLE PARALLELE. **Se due rette tagliate da una trasversale formano una coppia di angoli alterni interni congruenti allora sono parallele.**



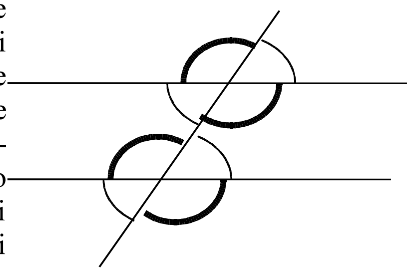
Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che le rette *a* e *b* non siano parallele. Se non sono parallele si incontreranno in un punto C. Allora si viene a formare il triangolo ABC. Per il teorema dell'angolo esterno del triangolo, l'angolo esterno α è maggiore dell'angolo interno β. Questa conseguenza contraddice l'ipotesi del teorema, secondo la quale gli angoli alterni interni α e β sono congruenti. Allora abbiamo sbagliato a negare la tesi, che perciò risulta vera■

Possiamo generalizzare il teorema precedenti ad altri casi.

CRITERIO DI PARALLELISMO. **Se due rette tagliate da una trasversale formano:**

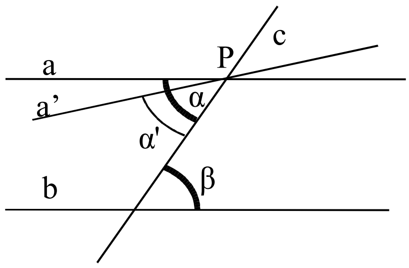
- **angoli alterni interni o alterni esterni congruenti *oppure***
- **angoli corrispondenti congruenti *oppure***
- **angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari**

allora sono parallele.



Dimostrazione. Tenendo conto che due angoli opposti al vertice sono congruenti e due angoli adiacenti sono supplementari, se risulta che due angoli corrispondenti qualsiasi sono congruenti, allora i quattro angoli acuti sono tutti congruenti ed i quattro angoli ottusi sono congruenti, e quindi anche angoli alterni interni pertanto per il teorema precedente le rette sono parallele. Analogamente, se risultano supplementari due qualsiasi angoli coniugati (interni o esterni) risulta sempre che i quattro angoli acuti sono tutti congruenti tra di loro ed i quattro angoli ottusi congruenti tra di loro, pertanto gli angoli alterni interni sono congruenti e, sempre per il teorema precedente, le due rette a e b sono parallele■

TEOREMA INVERSO DELLE PARALLELE. **Se due rette sono parallele allora formano con una trasversale qualsiasi due angoli alterni interni congruenti.**



Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo. Supponiamo che la tesi sia falsa, cioè che esista una coppia di angoli alterni interni α e β per i quali risulti che α>β. Per il punto P, vertice dell'angolo α si potrà allora tracciare una retta a' in modo che l'angolo da essa formato α' sia congruente a β. Ne segue che a' e b sono parallele perché formano angoli alterni interni congruenti. Allora esisterebbero due rette distinte, a e a', passanti per lo stesso punto P entrambe parallele alla retta b. Questa conclusione contraddice il V postulato di Euclide, secondo il quale per un punto esterno a una retta passa un'unica parallela. Da questa contraddizione possiamo concludere che abbiamo sbagliato a supporre falsa la tesi, in altre parole la tesi è vera■

In generale possiamo enunciare il seguente

TEOREMA. **Se due rette sono parallele allora formano con una trasversale**

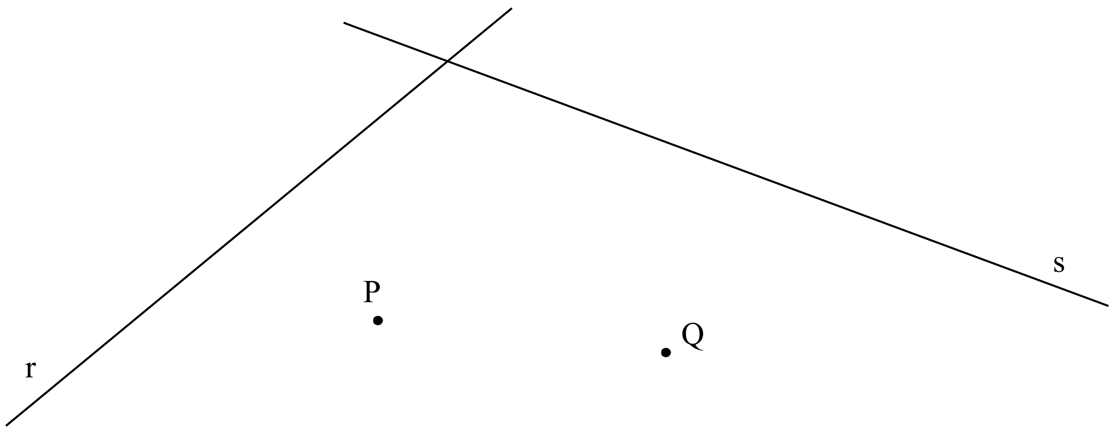
- angoli alterni interni o alterni esterni congruenti;
- angoli corrispondenti congruenti;
- angoli coniugati interni o coniugati esterni supplementari.

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che sono congruenti gli angoli alterni interni formati da due parallele tagliate da una trasversale. Tenendo conto che gli angoli opposti al vertice sono congruenti e gli angoli adiacenti sono supplementari, si possono dedurre facilmente tutte le tesi di questo teorema.

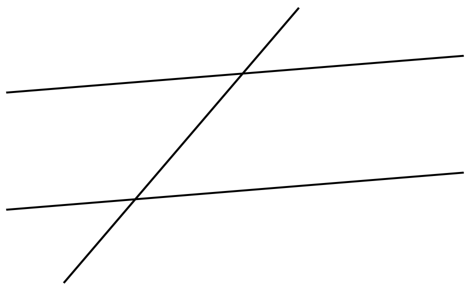
15 Vero o Falso?

a) Due rette parallele tagliate da una trasversale formano quattro angoli alterni interni [V] [F]
b) Gli angoli corrispondenti sono a due a due interni o esterni [V] [F]
c) Gli angoli interni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale [V] [F]
d) Gli angoli esterni si trovano da parti opposte rispetto alla trasversale [V] [F]
e) Due rette parallele possono anche coincidere [V] [F]
f) La relazione di parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza [V] [F]
g) Due rette distinte hanno sempre un punto in comune [V] [F]
h) Una retta che incontra due rette parallele forma angoli alterni interni supplementari [V] [F]
i) Per ogni retta è possibile tracciare una sola retta parallela [V] [F]
j) Se due rette formano con una trasversale due angoli alterni interni allora sono parallele [V] [F]
k) Nel ragionamento per assurdo si nega l'ipotesi per dimostrare che la tesi è vera [V] [F]
l) Ragionando per assurdo si nega la tesi e si ottenere una contraddizione con l'ipotesi [V] [F]

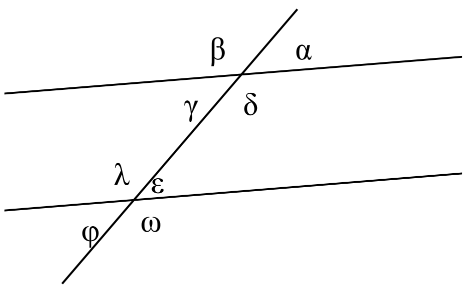
16 Nella seguente figura disegna una parallela e una perpendicolare alla retta r passanti per P, una parallela e una perpendicolare a s passanti per Q.



17 Nella seguente figura sono state tracciate due rette parallele e una trasversale indica con un arco gli angoli corrispondenti interni



18 Nella seguente figura sono state tracciate due rette parallele e una trasversale, sapendo che $\alpha = \frac{1}{3}\pi$, dove π è l'angolo piatto, indica che fazione dell'angolo piatto sono gli altri angoli:



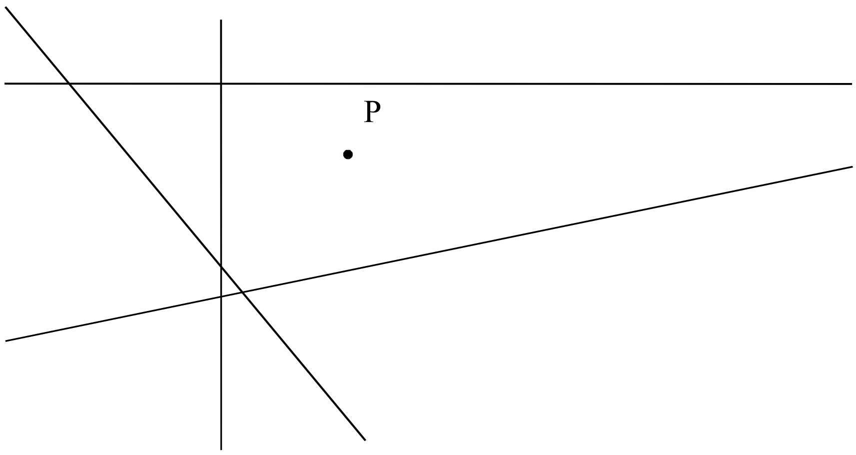
α = … β = …

γ = … δ = …

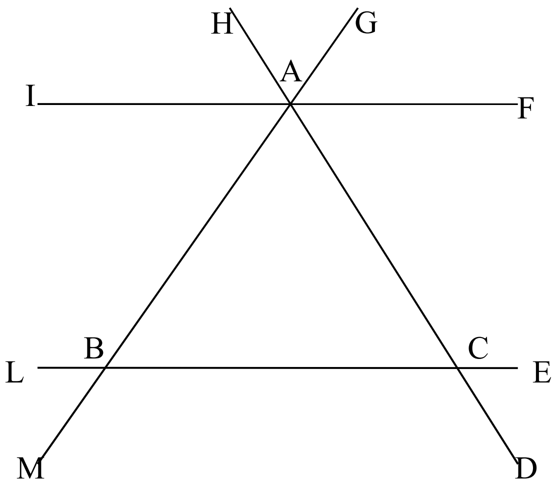
ε = … λ = …

φ = … ω= …

19 Disegna per il punto P le rette parallele alle altre

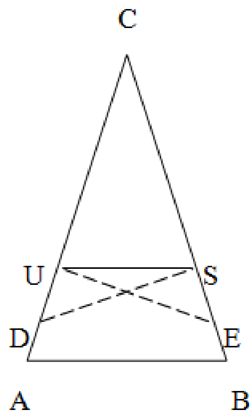


20 Nella seguente figura ABC è un triangolo isoscele, IF è parallela a BC. Individua tutti gli angoli congruenti all'angolo $A\widehat{B}C$



21 Completare ipotesi e tesi e mettere le parti della dimostrazione nell'ordine corretto:

In un triangolo ABC, isoscele su base AB, si prendano rispettivamente su AC e BC i punti D ed E equidistanti da C . Indicata con S la proiezione di D su BC e con U quella di E su AC, dimostrare che il segmento US è parallelo ad AB.



<u>Ipotesi</u>: $AC \cong ...$ $\quad D \in AC$; $E \in ...$ $\quad CD \cong ...$
$S \in BC$ $\quad DS \perp BC$ $\quad U \in ...$ $\quad EU \perp ...$

<u>Tesi</u>: $US \| AB$

PARTE 1: Il triangolo CSU è isoscele su base SU perché …………………………………………… … … … … … .
quindi risulta $C\hat{U}S$ ... $C\hat{S}U$.

PARTE 2) : I triangoli CDS e CEU hanno : l'angolo in $\hat{C}$ in comune, CD ... CE per …………, $D\hat{S}C$ ... ……… perché angoli……………………, quindi tali triangoli sono congruenti per il ....………………., ne segue CS ... CU .

PARTE 3) : Applicando il teorema sulla somma degli angoli interni ai triangoli ABC e CUS, si ha che $C\hat{U}S + C\hat{S}U$ ... $C\hat{A}B + CBA$ perché supplementari dello stesso angolo $\hat{C}$, ed essendo $\hat{A}$ ... B perché……………………………ed essendo $C\hat{U}S$ ……… perché………………....., risulta che $C\hat{A}B$ ... $C\hat{U}S$ perché……………………… .

PARTE 4) : Gli angoli $C\hat{A}B$ e $C\hat{U}S$ (congruenti perché dimostrato) sono angoli …………………. rispetto alle rette AB e US tagliate dalla trasversale …………, quindi le rette AB e US sono parallele.

Dimostra le seguenti affermazioni

22 Date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli corrispondenti (o alterni interni o alterni esterni) sono parallele.

23 Date due rette parallele tagliate da una trasversale, le bisettrici di due angoli coniugati interni (o coniugati esterni) sono perpendicolari.

24 Nel triangolo isoscele ABC traccia una parallela alla base, dimostra che essa individua un altro triangolo isoscele.

25 Se due rette r e s sono incidenti allora lo sono anche due qualsiasi rette u e v, con u parallela a r e v parallela a s.

26 Sia M il punto medio del segmento AB. Sia r una retta che incontra AB in M. Sulla retta r da parti opposte rispetto a M prendi due punti C e D in modo che $AC // BD$. Dimostra che $AC \cong BD$. Dal vertice C di un triangolo isoscele ABC conduci la parallela alla base AB. Dimostra che tale parallela è bisettrice dell'angolo esterno in C al triangolo.

27 Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Sia r la semiretta di origine C bisettrice dell'angolo formato dal prolungamento di BC e dal lato AC. Dimostra che la retta per AB è parallela a r.

28 Dato il triangolo isoscele ABC di base AB e vertice C, prolunga la base AB dalla parte di A di un segmento AD. Sia E un punto interno all'angolo $D\widehat{A}C$ in modo che $E\widehat{A}D \cong C\widehat{A}B$. Dimostra che $EA // CB$.

29 Sia ABC un triangolo equilatero. Traccia una parallela al lato AB che incontra il lato BC in D e AC in E. Dimostra che anche il triangolo CDE è equilatero.

30 Da ciascun vertice di un triangolo ABC traccia la parallela al lato opposto. Detti D, E, F i punti di intersezione delle parallele dimostra che il triangolo DEF ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC.

31 Sia AD la bisettrice dell'angolo in A del triangolo ABC. Dal punto D traccia la parallela al lato AB, essa incontra il lato AC in E. Dimostra che il triangolo EDC ha gli angoli ordinatamente congruenti a quelli di ABC. Dimostra anche che ADE è un triangolo isoscele.

32 In un triangolo ABC rettangolo in A traccia l'altezza AH relativa all'ipotenusa. Dimostra che il triangolo ABH ha gli angoli congruenti a quelli di ABC.

33 Sulla base BC di un triangolo isoscele ABC prendi un punto D e traccia da esso la perpendicolare *p* alla base. La suddetta perpendicolare incontra il lato AB in E e il lato AC in F. Dimostra che il triangolo AFE è isoscele.

34 In un triangolo ABC traccia la bisettrice AD dell'angolo in A. Da un punto N del lato AC traccia la parallela alla bisettrice AD, essa incontra che retta per AB in E e la retta per BC in F. Dimostra che AEN è un triangolo isoscele. Dimostra che ADC e NFC hanno angoli congruenti.

35 In un triangolo ABC sia E il punto di intersezione della bisettrice dell'angolo in B con il lato AC, Sia D un punto del lato AB tale che $DE \cong DB$. Dimostra che DE è parallelo a BC.

36 In un triangolo ABC traccia le bisettrici agli angoli nei vertici B e C. Sia D il punto di intersezione delle bisettrici. Da D traccia la parallela al lato BC e indica con E ed F i punti di intersezione di questa parallela con i lati rispettivamente AB e AC. Dimostra che $FE \cong EB + FC$.

37 Dato il triangolo ABC prolunga il lato AB dalla parte di A di un segmento AD congruente ad AB, prolunga poi il lato AC dalla parte di A di un segmento AE congruente ad AC. Dimostra che DE è parallelo a BC.

38 Sia AM la mediana di un triangolo ABC. Si prolunghi AM dalla parte di M di un segmento MD congruente ad AM. Dimostra che CD è parallelo ad AB.

39 Due rette parallele tagliate da una trasversale formano otto angoli, uno di essi è 1/3 dell'angolo retto. Determina le misure degli altri angoli.

40 Siano α e β due angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è parallela alla bisettrice di β.

41 Siano α e β due angoli corrispondenti formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, dimostra che la bisettrice di α è perpendicolare alla bisettrice di β.

42 Disegna due segmenti AB e CD disposti in modo che si incontrino nel loro punto medio comune M. Congiungi A con D e B con C, dimostra che AD è parallelo a CB.

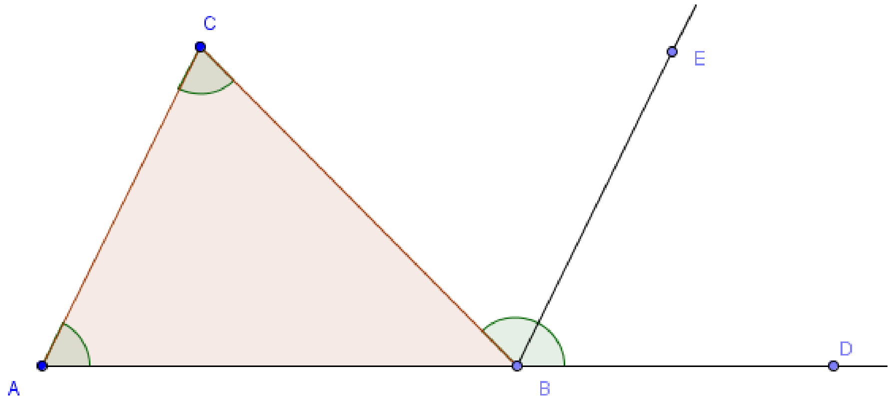
43 Disegna un angolo acuto $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi l'asse del segmento OP. Indica con Q e R i punti di intersezione dell'asse rispettivamente con la semiretta a e la semiretta b. Dimostra che OQ è parallelo a RP.

44 Disegna un angolo convesso $a\widehat{O}b$ e la sua bisettrice c. Disegna su c un punto P, disegna poi le perpendicolari PR e PQ rispettivamente alle semirette a e b. Dimostra che c è asse del segmento QR.

►4. Somma degli angoli interni di un triangolo

Possiamo ora a dimostrare il secondo teorema dell'angolo esterno di un triangolo.

TEOREMA. **In un triangolo un angolo esterno è congruente alla somma dei due angoli interni non adiacenti.**



Dimostrazione: Sia ABC un triangolo e sia $C\widehat{B}D$ un angolo esterno. Tracciamo la semiretta $BE // AC$ che divide l'angolo $C\widehat{B}D$ in due parti, $C\widehat{B}E$ e $E\widehat{B}D$. L'angolo $C\widehat{B}E$ risulta congruente all'angolo $A\widehat{C}B$ in quanto i due angoli sono alterni interni rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale CB; analogamente l'angolo $E\widehat{B}D$ risulta congruente all'angolo $C\widehat{A}B$ in quanto i due angoli sono corrispondenti rispetto alle rette parallele AC e BE tagliate dalla trasversale AD. Dunque $C\widehat{B}D$ è congruente alla somma degli angoli interni di vertici A e C.C.V.D.

COROLLARIO. **La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto.**

Dimostrazione: Dalla figura precedente $A\widehat{B}D \cong A\widehat{B}C + C\widehat{B}E + E\widehat{B}D = A\widehat{B}C + B\widehat{C}A + C\widehat{A}B$, pertanto la somma degli angoli interni è congruente all'angolo piatto ABD.

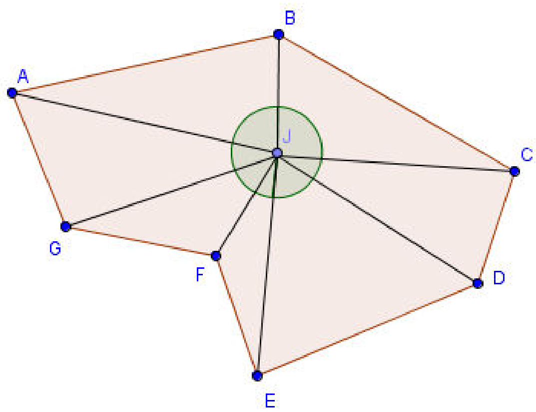
COROLLARIO. **Un triangolo non può avere più di un angolo retto e/o ottuso, dunque necessariamente almeno due angoli sono acuti. Di conseguenza, gli angoli alla base di un triangolo isoscele devono essere acuti.**

Somma degli angoli interni di un poligono

TEOREMA. **Dato un poligono P di n lati, la somma degli angoli interni di P è (n – 2) angoli piatti.**

Dimostrazione :

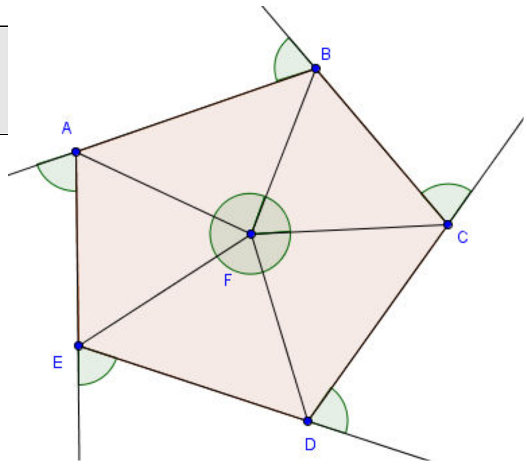
Infatti, dato un qualunque poligono (anche concavo) di n lati, scelto un opportuno punto interno in modo che, congiunto con ciascun vertice, il poligono resti diviso in n triangoli, si può osservare che la somma degli angoli interni del poligono è data dalla somma degli angoli interni di n triangoli meno l'angolo giro al centro, in figura l'angolo J.



TEOREMA. **La somma degli angoli esterni di un qualsiasi poligono convesso, indipendentemente dal numero dei lati, è congruente ad un angolo giro.**

Dimostrazione:

Ogni angolo esterno è adiacente ad un angolo interno, per cui se si hanno m lati e quindi m vertici la somma degli angoli interni e degli angoli esterni è pari ad m angoli piatti; essendo (m – 2) angoli piatti la somma degli angoli interni, sarà di due angoli piatti (quindi un angolo giro) la somma degli angoli esterni.



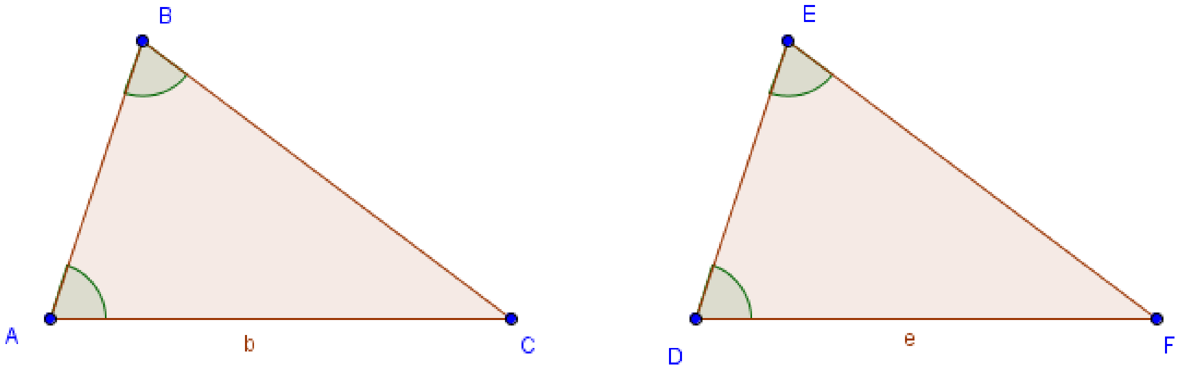
45 Vero o Falso?

a) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a un angolo esterno [V] [F]
b) La somma degli angoli interni di un quadrilatero è congruente a 3 angoli piatti [V] [F]
c) La somma degli angoli esterni di un pentagono è congruente a 5 angoli piatti [V] [F]
d) La somma degli angoli interni di un triangolo è congruente a due angoli retti [V] [F]
e) Un triangolo isoscele non può avere un angolo ottuso [V] [F]

►5. Generalizzazione dei criteri di congruenza dei triangoli

Se due triangoli hanno rispettivamente due angoli congruenti, allora anche i terzi angoli saranno congruenti nei due triangoli, in quanto supplementari della somma di angoli congruenti.
Dunque, se due triangoli hanno congruenti un lato e due angoli, anche se il lato congruente non è compreso tra i due angoli congruenti, risultano congruenti. Precisamente, vale la seguente proposizione.

2° CRITERIO DI CONGRUENZA GENERALIZZATO. **Due triangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti una coppia di lati e due coppie di angoli ugualmente posti rispetto ai lati congruenti.**



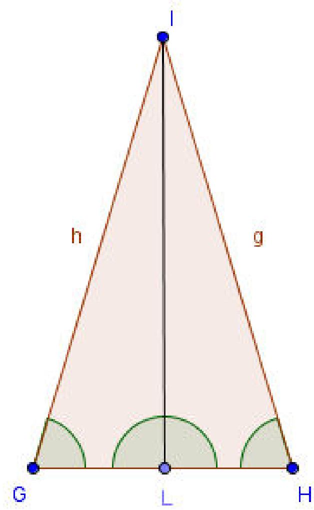
Dimostrazione:
Il caso in cui il lato congruente è compreso tra gli angoli congruenti è stato già esaminato ed utilizzato per la dimostrazione di varie proprietà. Ora esaminiamo l'altro caso.

In figura abbiamo rappresentato due triangoli, ABC e DEF che hanno per ipotesi i lati $AC \cong DF$ e gli angoli $B\widehat{A}C \cong E\widehat{D}F$ e $A\widehat{B}C \cong D\widehat{E}F$. I due triangoli risultano congruenti.

La tesi segue dal fatto che deve risultare $B\widehat{C}A \cong E\widehat{F}D$, in quanto tali angoli sono supplementari alla somma di angoli congruenti per ipotesi. Ci si riconduce quindi al caso del secondo criterio di congruenza già dimostrato in precedenza.

Riprendiamo una proprietà dei triangoli isosceli che abbiamo enunciato ma non abbiamo dimostrato:

PROPOSIZIONE. **In un triangolo isoscele l'altezza relativa alla base è anche bisettrice dell'angolo al vertice e mediana relativa alla base.**



Ipotesi: $IG \cong IH$, $I\widehat{G}H \cong I\widehat{H}G$, $IL \perp GH$.

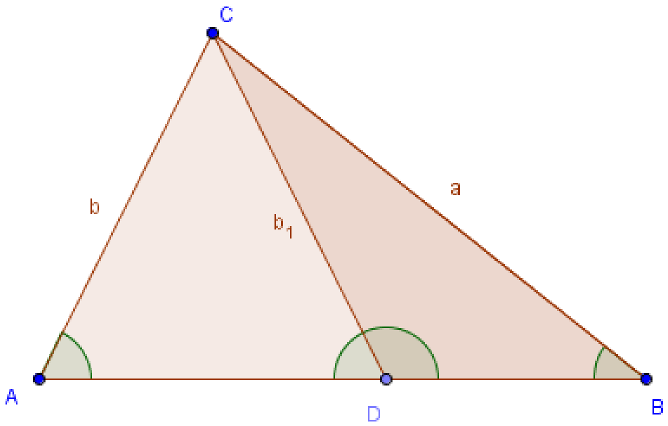
Tesi: $G\hat{I}L \cong H\hat{I}L$, $GL \cong LH$

Dimostrazione:

I triangoli GLI e LHI sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, avendo congruenti un lato e due angoli. Di conseguenza, i restanti elementi sono ordinatamente congruenti, in particolare $GL \cong LH$ e $G\hat{I}L \cong H\hat{I}L$ ■

Osservazione

Dall'esame dei primi tre criteri di congruenza dei triangoli, nonché dalla generalizzazione del secondo criterio, si potrebbe essere indotti a pensare che due triangoli sono congruenti se hanno tre coppie di elementi rispettivamente congruenti, se almeno una delle tre coppie di elementi è costituita da lati.

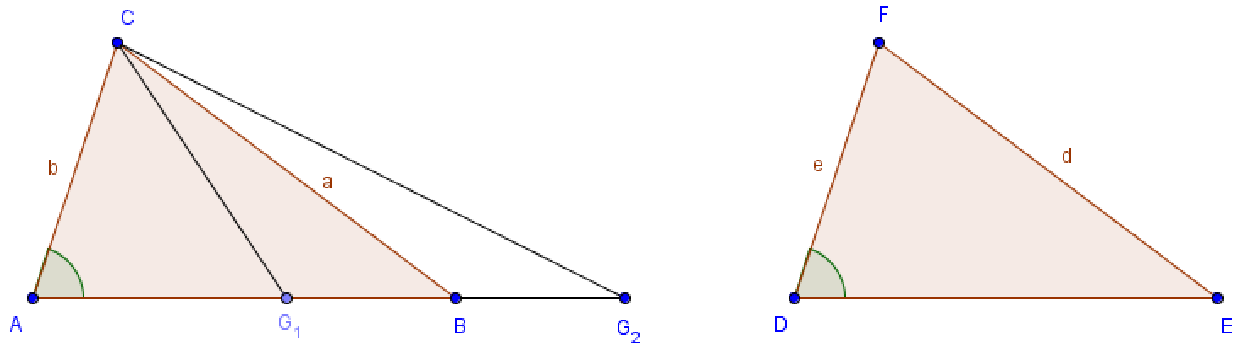


In realtà, il primo criterio non si può generalizzare come il secondo. Basta pensare alla figura seguente: ADC è un triangolo isoscele, B è un punto sul prolungamento della base AD. Unendo B con C, vengono individuati due nuovi triangoli, ABC e DBC che hanno in comune il lato CB e l'angolo di vertice B, ed hanno inoltre congruenti i lati AC e CD, ma evidentemente non sono congruenti. Quindi se due triangoli hanno due lati ed un angolo qualsiasi congruenti, non è detto che siano congruenti. Però nei due triangoli citati in figura, gli angoli $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$ sono supplementari.

Tale osservazione fa da premessa al quarto criterio di congruenza dei triangoli.

QUARTO CRITERIO DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI.

Due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due coppie di lati e l'angolo opposto ad uno di essi, a patto che l'angolo opposto all'altra coppia di lati congruenti sia della stessa specie (cioè sia, in entrambi i triangoli, acuto oppure retto oppure ottuso).



Ipotesi: $AC \cong DF$, $CB \cong FE$, $C\hat{A}B \cong F\hat{D}E$, $C\hat{B}A$ e $F\hat{E}D$ della stessa specie .

Tesi: $ABC \cong DEF$

Dimostrazione:

Sulla semiretta AB prendiamo il punto G in maniera tale che AG sia congruente a DE. I triangoli AGC e DEF saranno congruenti per il primo criterio, poiché $AC \cong DF$ e $C\hat{A}B \cong F\hat{D}E$ per ipotesi, $AG \cong DE$ per costruzione. Di conseguenza anche i rimanenti elementi risulteranno congruenti, in particolare $CG \cong FE$ e $C\hat{G}A \cong F\hat{E}D$.

Se il punto G coincide con B, abbiamo dimostrato la congruenza dei triangoli ABC e DEF. Altrimenti, il segmento CG, dovendo essere congruente ad FE, risulta congruente a CB. Dunque il triangolo CGB è isoscele sulla base GB. Gli angoli alla base $C\hat{G}B$ e $C\hat{B}G$, congruenti, sono necessariamente acuti.

Distinguiamo due casi:

- se G è interno al segmento AB, $C\hat{G}B$ è esterno al triangolo AGC e $C\hat{B}G$ è interno al triangolo ABC, quindi $D\hat{E}F \cong A\hat{G}C$ ottuso e $A\hat{B}C$ acuto;
- se G esterno al segmento AB, $C\hat{G}B$ è interno al triangolo AGC e $C\hat{B}G$ è esterno al triangolo ABC, quindi $D\hat{E}F \cong A\hat{G}C$ acuto e $A\hat{B}C$ ottuso.

Dunque, in nessuno dei due casi viene rispettata l'ipotesi: $C\hat{B}A$ e $F\hat{E}D$ sono della stessa specie.

►8. Congruenze di triangoli rettangoli

Per quanto affermato nelle proposizioni precedenti, sappiamo che i triangoli rettangoli hanno una coppia di angoli congruenti (quelli retti, essendo tutti congruenti fra loro gli angoli retti, come affermato dal IV postulato di Euclide) e gli altri angoli necessariamente acuti, in quanto la somma degli angoli interni di un triangolo è congruente ad un angolo piatto (come segue dal secondo teorema dell'angolo esterno e dai corollari).

Tenendo conto dunque dei criteri di congruenza dei triangoli, si possono riformulare dei criteri di congruenza specifici per i triangoli rettangoli.

CRITERI DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI RETTANGOLI. **Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno rispettivamente congruenti:**

(a) i due cateti (1° criterio);
(b) l'ipotenusa e un angolo acuto (2° criterio);
(c) un cateto e l'angolo acuto adiacente (2° criterio);
(d) un cateto e l'angolo acuto opposto (2° criterio);
(e) l'ipotenusa ed un cateto (4° criterio).

Il criterio (e) si chiama anche **criterio particolare di congruenza dei triangoli rettangoli** (ha naturalmente una formulazione più semplice del 4° criterio di congruenza dei triangoli perché si sa già che le coppie di angoli non citati nell'ipotesi sono "della stessa specie", perché certamente acuti). Due triangoli rettangoli che hanno congruenti l'ipotenusa ed un cateto hanno congruenti due coppie di lati e l'angolo opposto ad uno di essi (l'angolo retto, opposto all'ipotenusa), ed hanno gli angoli opposti all'altra coppia di lati congruenti della stessa specie (gli angoli opposti ai cateti congruenti sono acuti in entrambi i triangoli).

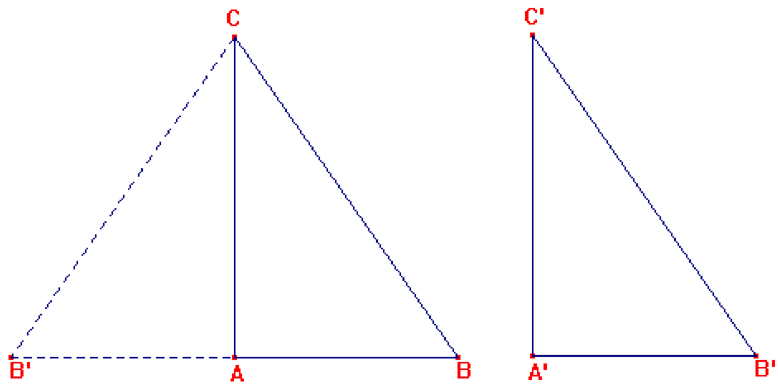
Data l'importanza di tale criterio, nonché la sua semplice dimostrazione indipendente dal quarto criterio di congruenza dei triangoli qualunque, lo riformuliamo a parte e ne proponiamo una dimostrazione:

CRITERIO PARTICOLARE DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI RETTANGOLI. **Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno ordinatamente congruenti un cateto e l'ipotenusa.**

Ipotesi: $A \cong A' \cong$ angolo retto
$AC \cong A'C'$ $\quad BC \cong B'C'$

Tesi : $ABC \cong A'B'C'$

Dimostrazione:



Si prolunga il cateto AB di un segmento AB' congruente ad A'B', quindi si congiunge B' con C. Il triangolo AB'C è anch'esso rettangolo in A, in quanto l'angolo in A è adiacente ad un angolo retto (CÂB). I triangoli rettangoli AB'C e A'B'C' sono congruenti per il primo criterio in quanto hanno i due cateti ordinatamente congruenti: $AC \cong A'C'$ per ipotesi e $AB \cong A'B'$ per costruzione. Di conseguenza risulterà $CB \cong C'B'$ e dunque $CB' \cong CB$ (per la proprietà transitiva della congruenza, essendo $CB \cong C'B'$ per ipotesi). Quindi il triangolo CBB' è isoscele sulla base B'B, e di conseguenza, per il teorema (diretto) del triangolo isoscele, gli angoli alla base sono congruenti: $A\widehat{B}C \cong A\widehat{B'}C$.

Allora i triangoli ABC e A'B'C' sono congruenti per il secondo criterio generalizzato, avendo ordinatamente congruenti due coppie di angoli e il lato opposto ad uno di essi (l'ipotenusa). C.V.D.

46 Vero o Falso?

a) Un triangolo rettangolo ha due angolo complementari [V] [F]
b) Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno almeno un lato congruente [V] [F]
c) Due triangoli rettangoli che hanno un cateto in comune sono congruenti [V] [F]
d) Due triangoli rettangoli che hanno l'ipotenusa in comune sono congruenti [V] [F]
e) Due triangoli rettangoli isosceli sono sempre congruenti [V] [F]
f) Due triangoli rettangoli isosceli che hanno un lato in comune sono congruenti [V] [F]
g) Gli angoli acuti di un triangolo rettangolo sono complementari [V] [F]

Esercizi su tutto il capitolo

47 * Dimostrare che in triangolo rettangolo gli angoli diversi dall'angolo retto sono acuti. Dimostrare,inoltre, che non può esistere un triangolo rettangolo equilatero.

48 * Sia ABC un triangolo e sia CH la bisettrice dell'angolo in C. Da un punto D diverso da H del lato AB si conduca la retta r parallela alla bisettrice CH. Si dimostri che la retta r interseca le rette AC e BC in due punti che hanno la stessa distanza dal vertice C.

49 * Dato il triangolo ABC, sia P il punto d'intersezione delle bisettrici degli angoli in A e in B. Condurre per P la retta parallela al lato AB, che incontra i lati AC e BC nei punti E ed F rispettivamente. Dimostrare che $EF \cong AE+BF$.

50 * Due segmenti AB e CD hanno il punto medio M in comune. Dimostrare che le rette AC e BD sono parallele.

51 * Dagli estremi di un segmento AB, nello stesso semipiano rispetto alla retta AB, condurre due segmenti AC e BD paralleli. Dimostrare che, se CD//AB, allora AC è congruente a BD.

52 * Sia ABC un triangolo equilatero e sia r la retta bisettrice degli angoli esterni di vertice A. Dimostrare che r // BC.

53 * In un triangolo isoscele ABC di base AB, siano M e N rispettivamente i punti medi di AC e BC. Dimostrare che MN // AB.

54 * Dimostrare che, in un triangolo rettangolo l'altezza relativa all'ipotenusa lo divide in due triangoli che hanno tra loro e col triangolo di partenza gli angoli ordinatamente congruenti.

55 * Sulle rette parallele r e s scegliere rispettivamente due segmenti congruenti AB e CD, congiungere A con C e B con D. Provare che i segmenti AC e BD sono sia paralleli che congruenti.

56 * Sia ABC un triangolo isoscele di base AB. Dimostrare che la bisettrice dell'angolo esterno di vertice C è parallela alla base AB.

57 Due triangoli isosceli sono congruenti se hanno congruenti la base e l'angolo al vertice.

58 In un triangolo isoscele, le altezze relative ai lati congruenti sono congruenti.

59 Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e l'altezza relativa all'ipotenusa.

60 Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un cateto e la mediana relativa ad esso.

61 Due triangoli rettangoli sono congruenti se hanno congruenti un angolo acuto e la sua bisettrice.

62 Se due triangoli hanno congruenti due coppie di lati e le mediane relative ai lati rimanenti, allora sono congruenti.

63 Dimostra che, se per i vertici di un triangolo si conducono le parallele ai lati opposti, queste parallele determinano, assieme al triangolo dato, quattro triangoli congruenti.

64 Dimostra che, in un triangolo isoscele, la bisettrice dell'angolo adiacente all'angolo al vertice è parallela alla base.

65 Dimostra che sono congruenti due triangoli isosceli che hanno gli angoli al vertice congruenti e congruenti le altezze relative a uno dei lati obliqui.

66 Dato un triangolo ABC, si prolunghi il lato CA dalla parte di A, si tracci la bisettrice dell'angolo interno di vertice A e si conduca da B la parallela a tale bisettrice, che incontri il prolungamento di CA nel punto D. Dimostrare che il triangolo ADB è isoscele.

67 Dato un angolo convesso aÔb traccia la sua bisettrice c. Per un punto P della bisettrice traccia la perpendicolare alla bisettrice stessa. Chiama A e B i punto di intersezione della perpendicolare con i lati a e b dell'angolo convesso. Dimostra che P è punto medio di AB.

68 Dato il triangolo isoscele ABC, di base AB, sul prolungamento dell'altezza relativa ad AB prendi un punto P. Traccia la retta per PA e per PB. Dimostra che l'angolo formato dalle rette PA e CA è congruente all'angolo formato dalle rette per PB e CB.

69 Nel triangolo isoscele ABC di vertice A e lati congruenti AB e AC, traccia le bisettrici degli angoli alla base. Sia D il loro punto di intersezione. Dimostra che anche il triangolo DBC è isoscele.

70 Dato un triangolo qualsiasi ABC dimostra che la bisettrice dell'angolo interno in A è perpendicolare alla bisettrice di uno degli angoli esterni in A.

71 Prolunga la mediana M del triangolo ABC di un segmento MD. Dimostra che se $AM \cong MD$ allora BD è parallela a CA..

72 Sia AN la mediana di un triangolo ABC. Dimostra che se ABM è isoscele il triangolo ABC è rettangolo e viceversa se il triangolo ABC è rettangolo in A allora ABM è isoscele.

73 Una retta t incontra due rette *a* e *b* rispettivamente in A e B. Dal punto medio M di AB traccia una retta che interseca a e b rispettivamente in C e D. Dimostra che se M è punto medio di CD allora *a* e *b* sono parallele.

74 Nel triangolo isoscele ABC prolunga la base AB di un segmento BD congruente a BC. Dimostra che l'angolo in C esterno al triangolo ADC è il triplo dell'angolo ADC.

75 Dato il triangolo ABC traccia la retta *r* perpendicolare ad AB passante per B, la retta *s* perpendicolare ad AB passante per A, la retta *t* perpendicolare ad AC passante per C. Detto D il punto di intersezione tra *r* e *t*, E il punto di intersezione tra *s* e *t*, dimostra che $D\widehat{A}C+C\widehat{B}E+B\widehat{C}E$ è un angolo retto.

76 Nel triangolo ABC traccia la media CM e il suo prolungamento MD a piacere. Da A conduci la perpendicolare alla mediana che la incontra in E, da B conduci un'altra perpendicolare alla mediana che la incontra in F. Dimostra che i triangoli AEM e BFM sono congruenti.

77 Sul prolungamento della base AB di un triangolo isoscele individua un punto D qualsiasi dalla parte di B. Traccia la perpendicolare per D a questo prolungamento, essa incontra i lati obliqui del triangolo AC e BC rispettivamente in E e in F. Dimostra che il triangolo CEF è isoscele.

78 Siano *r* e *s* due rette incidenti in un punto O. Su r prendi da parte opposta rispetto ad O i punti A e B tali che $AO\cong OB$. Su s prendi da parte opposta rispetto ad O i punti C e D tali che $CO\cong OD$. Quale delle seguenti coppie di rette sono parallele? Dimostralo. $CA // BD\ ;\ CB // AD$

79 Sia ABC un triangolo acutangolo. Nel semipiano di origine AB che non contiene C individua un punto D in modo che $B\widehat{A}D\cong C\widehat{B}A$. Dimostra che $CA // AD$. Nell'ipotesi in cui $AD\cong CB$ dimostra che anche $AC // BD$.

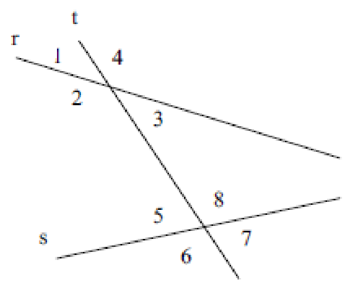
Gli esercizi contrassegnati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], pagg. 154-155; licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

Quesiti dalle prove INVALSI

80 Le rette r ed s sono tagliate dalla trasversale t. Quale delle seguenti condizioni permette di stabilire, per qualunque posizione di t, che r ed s sono parallele?

Gli angoli…

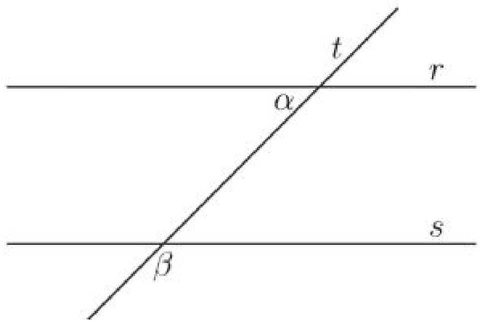
A. 1 e 5 sono supplementari.
B. 2 e 8 sono uguali.
C. 3 e 7 sono supplementari.
D. 4 e 7 sono uguali.
(*Prove invalsi 2004*)



81 r e s sono due rette parallele tagliate da una trasversale t. Quale tra le seguenti proposizioni è vera qualunque sia la posizione di t?

Gli angoli α e β sono…

A. supplementari
B. uguali
C. complementari
D. corrispondenti.
(*Prove invalsi 2006*)



82 Per un triangolo ottusangolo qualsiasi, quale delle seguenti affermazioni è vera?

(a) La somma dei suoi due angoli più piccoli è minore dell'angolo più grande.
(b) Il punto di incontro degli assi dei lati è certamente interno al triangolo.
(c) Il triangolo è necessariamente isoscele.
(d) Il triangolo può essere rettangolo.

(*Prove invalsi 2006*)

Autori

Angela D'Amato: teoria, esercizi
Gemma Fiorito: integrazioni
Antonio Bernardo: integrazioni, esercizi
Claudio Carboncini: editing OpenOffice

Gli esercizi contrassegnati con * sono tratti da Matematica 1, Dipartimento di Matematica, ITIS V.Volterra, San Donà di Piave, Versione [11-12] [S-A11], licenza CC, BY-NC-BD, per gentile concessione dei proff. che hanno reddatto il libro. Il libro è scaricabile da
http://www.istitutovolterra.it/dipartimenti/matematica/dipmath/docs/M1_1112.pdf

Collaborazione, commenti e suggerimenti

Se vuoi contribuire anche tu alla stesura e aggiornamento del manuale Matematica C3 o se vuoi inviare dei commenti e/o suggerimenti scrivi a antoniobernardo@matematicamente.it

Versione del documento

Versione 2.4 del 11.03.2012